# 2 Relaciones

# CAPÍTULO

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Puesto que el lector ya tiene familiaridad con muchas relaciones como “menor que”, “es paralela a”, “es un subconjunto de”, etc., percibe que estas relaciones consideran la existencia o inexistencia de cierta conexión entre pares de objetos que se consideran en un orden definido. Formalmente, una relación se define en términos de estos “pares ordenados”.

Un *par ordenado* de elementos $a$ y $b$, donde $a$ es el primer elemento y $b$ es el segundo, se denota por $(a, b)$. En particular,

$$(a, b) = (c, d)$$

si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Así, $(a, b) \neq (b, a)$, a menos que $a = b$. Esto contrasta con los conjuntos donde el orden de los elementos es irrelevante; por ejemplo, $\{3, 5\} = \{5, 3\}$.

## 2.2 PRODUCTO DE CONJUNTOS

Considere dos conjuntos arbitrarios $A$ y $B$. El conjunto de todos los pares ordenados $(a, b)$, donde $a \in A$ y $b \in B$ se denomina *producto*, o *producto cartesiano*, de $A$ y $B$. Una notación abreviada para indicar este producto es $A \times B$, que se lee “$A$ cruz $B$”. Por definición,

$$A \times B = \{(a, b)\} \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

A menudo, en vez de $A \times A$ se escribe $A^2$.

**EJEMPLO 2.1** $\mathbf{R}$ denota el conjunto de números reales, así que $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ es el conjunto de pares ordenados de números reales. El lector ya conoce la representación geométrica de $\mathbf{R}^2$ como puntos en el plano que se muestra en la figura 2-1. Aquí cada punto $P$ representa un par ordenado $(a, b)$ de números reales y viceversa; la recta vertical que pasa por $P$ corta al eje $x$ en $a$, y la recta horizontal que pasa por $P$ corta al eje $y$ en $b$. $\mathbf{R}^2$ a menudo se denomina *plano cartesiano*.

**EJEMPLO 2.2** Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1, a),\ (1, b),\ (1, c),\ (2, a),\ (2, b),\ (2, c)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1),\ (b, 1),\ (c, 1),\ (a, 2),\ (b, 2),\ (c, 2)\}$$

También, $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

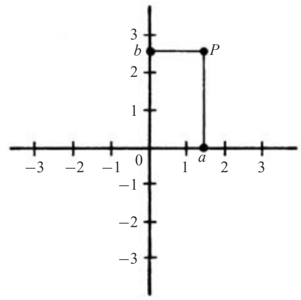



**Figura 2-1**

Hay dos cosas que vale la pena observar en los ejemplos presentados. En primer lugar, $A \times B \neq B \times A$. El producto cartesiano tiene que ver con pares ordenados, de modo que, naturalmente, el orden en que se consideran los conjuntos es importante. En segundo lugar, si $n(S)$ se usa para indicar el número de elementos que hay en un conjunto $S$, se tiene:

$$n(A \times B) = 6 = 2(3) = n(A)n(B)$$

De hecho, para conjuntos $A$ y $B$ finitos arbitrarios se tiene $n(A \times B) = n(A)n(B)$. Lo anterior es una consecuencia de la observación de que, para un par ordenado $(a, b)$ en $A \times B$, para $a$ hay $n(A)$ posibilidades, y para cada una de éstas hay $n(B)$ posibilidades para $b$.

La idea de producto de conjuntos se extiende a cualquier número finito de conjuntos. Para conjuntos cualesquiera $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el conjunto de todas las $n$-adas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ se denomina *producto* de los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ y se denota por

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad \text{o} \quad \prod_{i=1}^{n} A_1$$

Así como en lugar de $A \times A$ se escribe $A^2$, también en lugar de $A \times A \times \cdots \times A$, donde hay $n$ factores iguales a $A$, se escribe $A^n$. Por ejemplo, $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ denota el espacio tridimensional usual.

## 2.3 RELACIONES

Aquí conviene iniciar con una definición.

**Definición 2.1:** Sean $A$ y $B$ conjuntos. Una *relación binaria*, o simplemente una *relación* de $A$ a $B$, es un subconjunto de $A \times B$.

Suponga que $R$ es una *relación* de $A$ a $B$. Entonces $R$ es un conjunto de pares ordenados donde el primer elemento proviene de $A$ y el segundo proviene de $B$. Es decir, para cada par $a \in A$ y $b \in B$, es verdadera exactamente una de las siguientes proposiciones:

*i*) $(a, b) \in R$; entonces se dice "$a$ está relacionado con $b$", lo que se escribe $aRb$.
*ii*) $(a, b) \notin R$; entonces se dice "$a$ no está relacionado con $b$", lo que se escribe $a \not R b$.

Si $R$ es una relación del conjunto $A$ en sí mismo; es decir, si $R$ es un subconjunto de $A^2 = A \times A$, entonces se dice que $R$ es una relación *sobre* $A$.

El *dominio* de una relación $R$ es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a $R$, y el *rango* es el conjunto de los segundos elementos.

Aunque las relaciones $n$-arias, que implican $n$-adas ordenadas, se presentan en la sección 2.10, el término relación significará entonces relación binaria, a menos que se indique o implique otra cosa.

**EJEMPLO 2.3**

*a*) Sean $A = (1, 2, 3)$ y $B = \{x, y, z\}$, y sea $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$. Entonces $R$ es una relación de $A$ a $B$, puesto que $R$ es un subconjunto de $A \times B$. Con respecto a esta relación,

$$1Ry, 1Rz, 3Ry, \quad \text{pero} \quad 1\not{R}x, 2\not{R}x, 2\not{R}y, 2\not{R}z, 3\not{R}x, 3\not{R}z$$

El dominio de $R$ es $\{1, 3\}$ y el rango es $\{y, z\}$.

*b*) La inclusión de conjuntos $\subseteq$ es una relación sobre cualquier colección de conjuntos, ya que, dado cualquier par de conjuntos $A$ y $B$, se tiene $A \subseteq B$ o $A \not\subseteq B$.

*c*) Una relación conocida sobre el conjunto **Z** de enteros es "*m* divide a *n*". Una notación común para indicar esto consiste en escribir $m \mid n$ cuando $m$ divide a $n$. Así, $6 \mid 30$ pero $7 \nmid 25$.

*d*) Considere el conjunto de $L$ líneas rectas en el plano. La perpendicularidad, que se escribe "$\perp$" es una relación sobre $L$. Es decir, dado cualquier par de líneas rectas $a$ y $b$, se cumple $a \perp b$ o $a \not\perp b$. En forma semejante, la relación "es paralela a", que se escribe "$\parallel$", es una relación sobre $L$, ya que se cumple $a \parallel b$ o $a \nparallel b$.

*e*) Sea $A$ cualquier conjunto. Una relación importante sobre $A$ es la de *igualdad*,

$$\{(a, a) \mid a \in A\}$$

que suele denotarse por "$=$". Esta relación también se denomina relación *identidad* o *diagonal* sobre $A$ y del mismo modo se denotará por $\Delta_A$, o simplemente por $\Delta$.

*f*) Sea $A$ cualquier conjunto. Entonces $A \times A$ y $\emptyset$ son subconjuntos de $A \times A$ y son relaciones sobre $A$ denominadas *relación universal* y *relación vacía*, respectivamente.

### Relación inversa

Sea $R$ cualquier relación de un conjunto $A$ a un conjunto $B$. La *inversa* de $R$, denotada por $R^{-1}$, es la relación de $B$ a $A$ que consta de los pares ordenados que, cuando se invierten, pertenecen a $R$; es decir,

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Por ejemplo, sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{x, y, z\}$. Así, la inversa de

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\} \quad \text{es} \quad R^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3)\}$$

Resulta evidente que si $R$ es cualquier relación, entonces $(R^{-1})^{-1} = R$. También, el dominio y el rango de $R^{-1}$ son iguales, respectivamente, al rango y al dominio de $R$. Además, si $R$ es una relación sobre $A$, entonces $R^{-1}$ también es una relación sobre $A$.

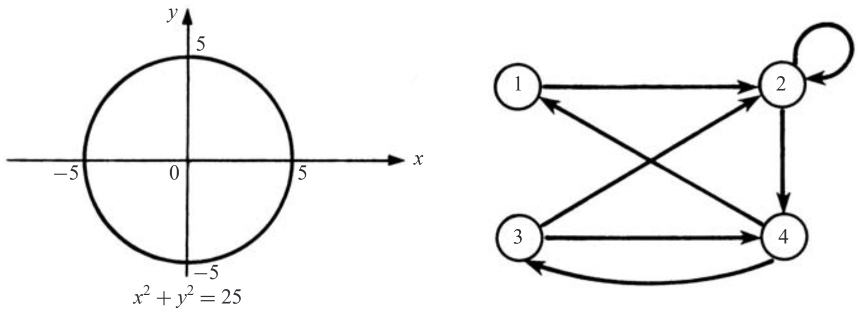
## 2.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RELACIONES

Hay varias formas de representar las relaciones.

### Relaciones sobre R

Sea $S$ una relación sobre el conjunto **R** de números reales; es decir, $S$ es un subconjunto de $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. A menudo, $S$ consta de todos los pares ordenados de números reales que satisfacen alguna ecuación dada $E(x, y) = 0$ (como $x^2 + y^2 = 25$).

Puesto que $R^2$ puede representarse mediante el conjunto de puntos en el plano, $S$ se representa recalcando los puntos en el plano que pertenecen a $S$. La representación gráfica de la relación algunas veces se denomina *gráfica* de la relación. Por ejemplo, la gráfica de la relación $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia centrada en el origen con radio igual a 5. Vea la figura 2-2*a*).




*a*) *b*)

**Figura 2-2**

## Gráficas dirigidas y relaciones sobre conjuntos

Hay una forma importante de representar una relación $R$ sobre un conjunto finito. Primero se escriben los elementos del conjunto, y luego se traza una flecha desde cada elemento $x$ hasta cada elemento $y$, siempre que $x$ esté relacionado con $y$. Este diagrama se denomina *gráfica dirigida* de la relación. La figura 2-2*b*), por ejemplo, muestra la gráfica dirigida de la siguiente relación $R$ sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

Observe que hay una flecha que va de 2 a sí mismo, ya que 2 está relacionado con 2 bajo $R$.

Estas gráficas dirigidas se estudiarán en detalle como un tema por separado en el capítulo 8. Aquí se mencionan para tener una panorámica más completa.

## Representaciones de relaciones sobre conjuntos finitos

Suponga que $A$ y $B$ son conjuntos finitos. Hay dos formas de representar una relación $R$ de $A$ a $B$.

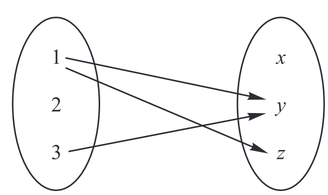
*i*) Se forma un arreglo rectangular (matriz) cuyos renglones se identifican mediante los elementos de $A$ y cuyas columnas se identifican mediante los elementos de $B$. En cada posición del arreglo se escribe 1 o 0 según $a \in A$ esté o no relacionado con $b \in B$. Este arreglo se denomina *matriz de la relación*.

*ii*) Los elementos de $A$ y de $B$ se escriben en dos óvalos ajenos y luego se traza una flecha de $a \in A$ a $b \in B$ siempre que $a$ esté relacionado con $b$. Esta representación se denomina *diagrama sagital* de la relación.

En la figura 2-3 se muestra, en las dos formas mencionadas, la relación $R$ en el ejemplo 2.3*a*).

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |

*i*)




*ii*)

$R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$

**Figura 2-3**

## 2.5 COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Sean $A$, $B$ y $C$ conjuntos, $R$ una relación de $A$ a $B$ y $S$ una relación de $B$ a $C$. Es decir, $R$ es un subconjunto de $A \times B$ y $S$ es un subconjunto de $B \times C$. Entonces $R$ y $S$ originan una relación de $A$ a $C$ denotada por $R \circ S$ y definida por:

$$a(R \circ S)c \text{ si para alguna } b \in B \text{ se tiene } aRb \text{ y } bSc.$$

Es decir,

$$R \circ S = \{(a, c) \mid \text{existe } b \in B \text{ para la cual } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}$$

La relación $R \circ S$ se denomina *composición* de $R$ y $S$; algunas veces se denota simplemente por $RS$.

Suponga que $R$ es una relación sobre un conjunto $A$; es decir, $R$ es una relación de un conjunto $A$ en sí mismo. Entonces $R \circ R$, la composición de $R$ consigo mismo, siempre está definida. También, $R \circ R$ algunas veces se denota por $R^2$. En forma semejante, $R^3 = R^2 \circ R = R \circ R \circ R$, y así sucesivamente. Por tanto, $R^n$ está definida para todo $n$ positivo.

**Advertencia:** Muchos textos denotan la composición de las relaciones $R$ y $S$ con $S \circ R$, en lugar de $R \circ S$. Esto se hace así a fin de coincidir con el hábito de usar $g \circ f$ para denotar la composición de $f$ y $g$, donde $f$ y $g$ son funciones. Así, el lector quizá deba ajustarse a esta notación cuando utilice este texto como complemento de otro texto. Sin embargo, cuando una relación $R$ se compone consigo misma, entonces el significado de $R \circ R$ es inequívoco.

**EJEMPLO 2.4** Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$ y sea

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\} \quad \text{y} \quad S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$$

Considere los diagramas sagitales de $R$ y $S$ como en la figura 2-4. Observe que hay una flecha de 2 a $d$ seguida por una flecha de $d$ a $z$. Estas dos flechas pueden considerarse como una "ruta" que "conecta" (o une) el elemento $2 \in A$ con el elemento $z \in C$. Así,

$$2(R \circ S)z \quad \text{puesto que} \quad 2Rd \text{ y } dSz$$

En forma semejante hay una ruta de 3 a $x$ y una ruta de 3 a $z$. Entonces

$$3(R \circ S)x \quad \text{y} \quad 3(R \circ S)z$$

Ningún otro elemento de $A$ está unido con un elemento de $C$. En consecuencia,

$$R \circ S = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}$$

El primer teorema que se presenta establece que la composición de relaciones es asociativa.

**Teorema 2.1:** Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ conjuntos. Suponga que $R$ es una relación de $A$ a $B$, $S$ es una relación de $B$ a $C$ y $T$ es una relación de $C$ a $D$. Entonces

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

La demostración de este teorema se proporciona en el problema 2.8.

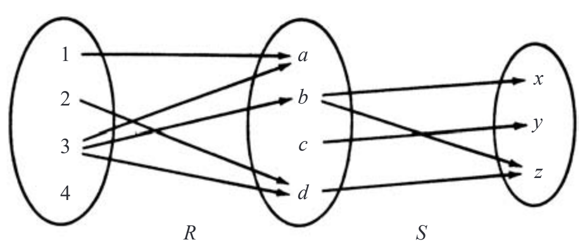



**Figura 2-4**

### Composición de relaciones y matrices

Hay otra forma para encontrar $R \circ S$. Sean $M_R$ y $M_S$ que denotan, respectivamente, las representaciones matriciales de las relaciones $R$ y $S$. Entonces

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al multiplicar $M_R$ y $M_S$ se obtiene la matriz

$$M = M_R M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los elementos diferentes de cero en esta matriz indican cuáles elementos están relacionados por $R \circ S$. Así, $M = M_R M_S$ y $M_{R \circ S}$ tienen los mismos elementos distintos de cero.

## 2.6 TIPOS DE RELACIONES

En esta sección se analizan varios tipos de relaciones importantes definidas sobre un conjunto $A$.

### Relaciones reflexivas

Una relación $R$ sobre un conjunto es *reflexiva* si $aRa$ para toda $a \in A$; es decir, si $(a, a) \in R$ para toda $a \in A$. Por tanto, $R$ no es reflexiva si existe $a \in A$ tal que $(a, a) \notin R$.

**EJEMPLO 2.5** Considere las cinco relaciones siguientes sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\} \\ R_2 &= \{(1, 1)(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \\ R_3 &= \{(1, 3), (2, 1)\} \\ R_4 &= \emptyset, \text{ la relación vacía} \\ R_5 &= A \times A, \text{ la relación universal} \end{aligned}$$

Determine cuáles de las relaciones son reflexivas.

Puesto que $A$ contiene los cuatro elementos 1, 2, 3 y 4, una relación sobre $A$ es reflexiva si contiene los cuatro pares (1, 1), (2, 2), (3, 3) y (4, 4). Así, sólo $R_2$ y la relación universal $R_5 = A \times A$ son reflexivas. Observe que $R_1$, $R_3$ y $R_4$ no son reflexivas porque, por ejemplo, (2, 2) no pertenece a ninguna de ellas.

**EJEMPLO 2.6** Considere las cinco relaciones siguientes:

1) Relación $\leq$ (menor que o igual a) sobre el conjunto **Z** de enteros.
2) Inclusión de conjuntos $\subseteq$ sobre una colección $C$ de conjuntos.
3) Relación $\perp$ (es perpendicular a) sobre el conjunto $L$ de líneas rectas en el plano.
4) Relación $\parallel$ (es paralela a) sobre el conjunto $L$ de líneas rectas en el plano.
5) Relación $\mid$ de divisibilidad sobre el conjunto **N** de enteros positivos. (Recuerde que $x \mid y$ si existe $z$ tal que $xz = y$.)

Determine cuáles de las relaciones son reflexivas.

La relación 3) no es reflexiva porque ninguna línea recta es perpendicular a sí misma. También la relación 4) no es reflexiva porque ninguna línea recta es paralela a sí misma. Las otras relaciones son reflexivas; es decir, $x \leq x$ para toda $x \in \mathbf{Z}$, $A \subseteq A$ para cualquier conjunto $A \subseteq C$, y $n \mid n$ para todo entero positivo $n \in \mathbf{N}$.

## Relaciones simétricas y antisimétricas

Una relación $R$ sobre un conjunto $A$ es *simétrica* si siempre que $aRb$ entonces $bRa$; es decir, siempre que $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$. Por tanto, $R$ no es simétrica si existen $a, b \in A$, tales que $(a, b) \in R$ pero $(b, a) \notin R$.

### EJEMPLO 2.7

*a*) Determine cuáles de las relaciones en el ejemplo 2.5 son simétricas.

$R_1$ no es simétrica porque $(1, 2) \in R_1$ pero $(2, 1) \notin R_1$. $R_3$ no es simétrica porque $(1, 3) \in R_3$ pero $(3, 1) \notin R_3$. Las otras relaciones son simétricas.

*b*) Determine cuáles de las relaciones en el ejemplo 2.6 son simétricas.

La relación $\perp$ es simétrica porque si la línea recta $a$ es perpendicular a la línea recta $b$, entonces $b$ es perpendicular a $a$. También, $\parallel$ es simétrica porque si la línea recta $a$ es paralela a la línea recta $b$, entonces $b$ es paralela a la línea recta $a$. Las otras relaciones no son simétricas. Por ejemplo:

$$3 \leq 4 \text{ pero } 4 \not\leq 3; \quad \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \text{ pero } \{1, 2, 3\} \not\subseteq \{1, 2\} \quad \text{y} \quad 2 \mid 6 \text{ pero } 6 \nmid 2.$$

Una relación $R$ sobre un conjunto $A$ es *antisimétrica* siempre que $aRb$ y $bRa$ entonces $a = b$; es decir, si $a \neq b$ y $aRb$, entonces $b\not{R}a$. Por tanto, $R$ no es antisimétrica si existen elementos distintos $a$ y $b$ en $A$ tales que $aRb$ y $bRa$.

### EJEMPLO 2.8

*a*) Determine cuáles de las relaciones en el ejemplo 2.5 son antisimétricas.

$R_2$ no es antisimétrica porque $(1, 2)$ y $(2, 1)$ pertenecen a $R_2$, pero $1 \neq 2$. En forma semejante, la relación universal $R_3$ no es antisimétrica. Todas las otras relaciones son antisimétricas.

*b*) Determine cuáles de las relaciones en el ejemplo 2.6 son antisimétricas.

La relación $\leq$ es antisimétrica porque siempre que $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$. La inclusión de conjuntos $\subseteq$ es antisimétrica siempre que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$. También, la divisibilidad sobre $\mathbf{N}$ es antisimétrica porque siempre que $m \mid n$ y $n \mid m$, entonces $m = n$. (Observe que la divisibilidad sobre $\mathbf{Z}$ no es antisimétrica porque $3 \mid -3$ y $-3 \mid 3$ pero $3 \neq -3$.) Las relaciones $\perp$ y $\parallel$ no son antisimétricas.

**Observación:** Las propiedades de ser simétrica y ser antisimétrica no son negaciones entre sí. Por ejemplo, la relación $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ no es simétrica ni antisimétrica. Por otra parte, la relación $R' = \{(1, 1), (2, 2)\}$ es tanto simétrica como antisimétrica.

## Relaciones transitivas

Una relación $R$ sobre un conjunto $A$ es *transitiva* si siempre que $aRb$ y $bRc$ entonces $aRc$; es decir, siempre que $(a, b), (b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$. Por tanto, $R$ no es transitiva si existe $a, b, c \in R$ tal que $(a, b), (b, c) \in R$ pero $(a, c) \notin R$.

**EJEMPLO 2.9**

*a*) Determine cuáles de las relaciones en el ejemplo 2.5 son transitivas.

La relación $R_3$ no es transitiva porque $(2, 1), (1, 3) \in R_3$ pero $(2, 3) \notin R_3$. Todas las otras relaciones son transitivas.

*b*) Determine cuáles de las relaciones en el ejemplo 2.6 son transitivas.

Las relaciones $\leq$, $\subseteq$ y $|$ son transitivas, aunque ciertamente $\perp$ no lo es. También, puesto que ninguna línea recta es paralela a sí misma, se tiene que $a \parallel b$ y $b \parallel a$, pero $a \parallel a$. Por tanto, $\parallel$ no es transitiva. (Se observa que la relación "es paralela o igual a" es una relación transitiva sobre el conjunto $L$ de líneas rectas en el plano.)

La propiedad de transitividad también se expresa en términos de la composición de relaciones. Para una relación $R$ sobre $A$ se definió $R^2 = R \circ R$ y, de manera más general, $R^n = R^{n-1} \circ R$. Entonces se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.2:** Una relación $R$ es transitiva si y sólo si para toda $n \geq 1$, se tiene $R^n \subseteq R$.

## 2.7 PROPIEDADES DE CERRADURA

Considere un conjunto dado $A$ y la colección de todas las relaciones sobre $A$. Sea $P$ una propiedad de tales relaciones, como ser simétrica o transitiva. Una relación con la propiedad $P$ se denomina $P$-relación. La $P$-cerradura de una relación arbitraria $R$ sobre $A$, lo cual se escribe $P(R)$, es una $P$-relación tal que

$$R \subseteq P(R) \subseteq S$$

para toda $P$-relación $S$ que contiene a $R$. Se escribe

$$(R)\text{reflexiva}, \quad (R)\text{simétrica} \quad \text{y} \quad (R)\text{transitiva}$$

para las cerraduras reflexiva, simétrica y transitiva de $R$.

En términos generales, no es necesario que $P(R)$ exista. Sin embargo, hay una situación general en la que $P(R)$ siempre existe. Suponga que $P$ es una propiedad tal que por lo menos hay una $P$-relación que contiene a $R$ y que la intersección de cualquier $P$-relaciones es nuevamente una $P$-relación. Entonces es posible demostrar (problema 2.16) que

$$P(R) = \cap\,(S \mid S \text{ es una } P\text{-relación y } R \subseteq S)$$

Por tanto, es posible obtener $P(R)$ a partir del enfoque descendente o "top-down"; es decir, como la intersección de relaciones. Sin embargo, por lo general $P(R)$ se quiere encontrar con el enfoque ascendente o "bottom-up"; es decir, adjuntando elementos a $R$ a fin de obtener $P(R)$. Esto es lo que se hace a continuación.

### Cerraduras reflexiva y simétrica

El siguiente teorema establece cómo obtener fácilmente las cerraduras reflexiva y simétrica de una relación. Aquí $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ es la relación diagonal o de igualdad sobre $A$.

**Teorema 2.3:** Sea $R$ una relación sobre un conjunto $A$. Entonces:

*i*) $R \cup \Delta_A$ es la cerradura reflexiva de $R$.
*ii*) $R \cup R^{-1}$ es la cerradura simétrica de $R$.

En otras palabras, $(R)$reflexiva se obtiene simplemente al agregar a $R$ los elementos $(a, a)$ en la diagonal que aún no pertenecen a $R$, y $(R)$simétrica se obtiene al añadir a $R$ todos los pares $(b, a)$ siempre que $(a, b)$ pertenezca a $R$.

**EJEMPLO 2.10** Considere la relación $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3)\}$, sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces

$$(R)\text{reflexiva} = R \cup \{(2, 2), (4, 4)\} \quad \text{y} \quad (R)\text{simétrica} = R \cup \{(4, 2), (3, 4)\}$$

### Cerradura transitiva

Sea $R$ una relación sobre un conjunto $A$. Recuerde que $R^2 = R \circ R$ y $R^n = R^{n-1} \circ R$. Se define

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

El siguiente teorema es válido:

**Teorema 2.4:** $R^*$ es la cerradura transitiva de $R$.

Suponga que $A$ es un conjunto finito con $n$ elementos. En el capítulo 8 sobre gráficas se demuestra que

$$R^* = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$$

Esto proporciona el siguiente teorema:

**Teorema 2.5:** Sea $R$ una relación sobre un conjunto $A$ con $n$ elementos. Entonces:

$$(R)\text{transitiva} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$$

**EJEMPLO 2.11** Considere la relación $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, sobre $A = \{(1, 2, 3)\}$. Entonces:

$$R^2 = R \circ R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\} \quad \text{y} \quad R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

En consecuencia,

$$(R)\text{transitiva} = (R) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 3)\}$$

## 2.8 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Considere un conjunto $S$ no vacío. Una relación $R$ sobre $S$ es una *relación de equivalencia* si $R$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Es decir, $R$ es una relación de equivalencia sobre $S$ si tiene las tres propiedades siguientes:

1) Para toda $a \in S$, $aRa$. 2) Si $aRb$, entonces $bRa$. 3) Si $aRb$ y $bRc$, entonces $aRc$.

La idea general detrás de una relación de equivalencia es que es una clasificación de objetos que de alguna manera son "semejantes". De hecho, la relación "=" de igualdad sobre cualquier conjunto $S$ es una relación de equivalencia; es decir,

1) $a = a$ para toda $a \in S$. 2) Si $a = b$, entonces $b = a$. 3) Si $a = b$, $b = c$, entonces $a = c$.

A continuación se presentan otras relaciones de equivalencia.

**EJEMPLO 2.12**

*a*) Sean $L$ el conjunto de líneas rectas y $T$ el conjunto de triángulos en el plano euclidiano.

*i*) La relación "es paralela o idéntica a" es una relación de equivalencia sobre $L$.

*ii*) Las relaciones de congruencia y semejanza son relaciones de equivalencia sobre $T$.

*b*) La relación $\subseteq$ de inclusión de conjuntos no es una relación de equivalencia. Es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica, puesto que $A \subseteq B$ no implica $B \subseteq A$.

*c*) Sea $m$ un entero positivo fijo. Se dice que dos enteros $a$ y $b$ son *congruentes módulo m*, lo cual se escribe

$$a \equiv b \ (\text{mód } m)$$

si $m$ divide a $a - b$. Por ejemplo, para el módulo $m = 4$ se tiene

$$11 \equiv 3 \ (\text{mód } 4) \quad \text{y} \quad 22 \equiv 6 \ (\text{mód } 4)$$

puesto que 4 divide a $11 - 3 = 8$ y 4 divide a $22 - 6 = 16$. Esta relación de congruencia módulo $m$ es una relación de equivalencia importante.

## Relaciones de equivalencia y particiones

En esta subsección se estudia la relación entre las relaciones de equivalencia y las particiones sobre un conjunto no vacío $S$. Primero recuerde que una partición $P$ de $S$ es una colección $\{A_i\}$ de subconjuntos no vacíos de $S$ con las dos propiedades siguientes:

1) Cada $a \in S$ pertenece a algún $A_i$.
2) Si $A_i \neq A_j$ entonces $A_i \cap A_j = \varnothing$.

En otras palabras, una partición $P$ de $S$ es una subdivisión de $S$ en conjuntos ajenos no vacíos. (Vea la sección 1.7.)

Suponga que $R$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto $S$. Para toda $a \in S$, sea $[a]$ el conjunto de elementos de $S$ con los que $a$ está relacionada bajo $R$; es decir,

$$[a] = \{x \mid (a, x) \in R\}$$

$[a]$ se denomina *clase de equivalencia* de $a$ en $S$; cualquier $b \in [a]$ se denomina *representante* de la clase de equivalencia.

La colección de todas las clases de equivalencia de elementos de $S$ bajo una relación de equivalencia $R$ se denota con $S/R$; es decir,

$$S/R = \{[a] \mid a \in S\}$$

Se denomina *conjunto cociente* de $S$ entre $R$. La propiedad fundamental de un conjunto cociente está contenida en el siguiente teorema.

**Teorema 2.6:** Sea $R$ una relación de equivalencia sobre un conjunto $S$. Entonces $S/R$ es una partición de $S$. En específico:

*i*) Para todo $a$ en $S$, se tiene $a \in [a]$.
*ii*) $[a] = [b]$ si y sólo si $(a, b) \in R$.
*iii*) Si $[a] \neq [b]$, entonces $[a]$ y $[b]$ son ajenos.

A la inversa, dada una partición $\{A_i\}$ del conjunto $S$, hay una relación de equivalencia $R$ sobre $S$ tal que los conjuntos $A_i$ son las clases de equivalencia.

Este importante teorema se demostrará en el problema 2.17.

### EJEMPLO 2.13

*a*) Considere la relación $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ sobre $S = \{1, 2, 3\}$.

Es posible demostrar que $R$ es reflexiva, simétrica y transitiva; es decir, que $R$ es una relación de equivalencia. También:

$$[1] = \{1, 2\}, [2] = \{1, 2\}, [3] = \{3\}$$

Observe que $[1] = [2]$ y que $S/R = \{[1], [3]\}$ es una partición de $S$. Como un conjunto de representantes de las clases de equivalencia pueden elegirse $\{1, 3\}$ o $\{2, 3\}$.

*b*) Sea $R_5$ la relación de congruencia módulo 5 sobre el conjunto **Z** de enteros, denotada por

$$x \equiv y \text{ (mód 5)}$$

Esto significa que la diferencia $x - y$ es divisible entre 5. Entonces $R_5$ es una relación de equivalencia sobre **Z**. El conjunto cociente $\mathbf{Z}/R_5$ contiene las cinco clases de equivalencia siguientes:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}\\
A_1 &= \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}\\
A_2 &= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}\\
A_3 &= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}\\
A_4 &= \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}
\end{aligned}$$

Cualquier entero $x$, expresado de manera única en la forma $x = 5q + r$, donde $0 \leq r < 5$, es un miembro de la clase de equivalencia $A_r$ y $r$ es el residuo. Como era de esperarse, **Z** es la unión disjunta de las clases de equivalencia $A_1, A_2, A_3$ y $A_4$. Como un conjunto de representantes de las clases de equivalencia suele elegirse $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ o $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

## 2.9 RELACIONES DE ORDEN PARCIAL

Una relación $R$ sobre un conjunto $S$ se denomina *ordenamiento parcial* u *orden parcial* de $S$ si $R$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un conjunto $S$ junto con un orden parcial $R$ se denomina *conjunto parcialmente ordenado* o *conjunto PO*. Los conjuntos parcialmente ordenados se estudiarán con más detalle en el capítulo 14, por lo que aquí sólo se proporcionan algunos ejemplos.

### EJEMPLO 2.14

*a*) La relación $\subseteq$ de inclusión de conjuntos es un ordenamiento parcial sobre cualquier colección de conjuntos, ya que la inclusión de conjuntos posee las tres propiedades deseadas. Es decir,

1) $A \subseteq A$ para cualquier conjunto $A$.
2) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
3) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

*b*) La relación $\leq$ sobre el conjunto **R** de números reales es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Así, $\leq$ significa un orden parcial sobre **R**.

*c*) La relación "$a$ divide a $b$", escrita $a \mid b$, es un ordenamiento parcial sobre el conjunto **N** de enteros positivos. Sin embargo, "$a$ divide a $b$" no es un ordenamiento parcial sobre el conjunto **Z** de enteros, puesto que $a \mid b$ y $b \mid a$ no necesariamente implica $a = b$. Por ejemplo, $3 \mid -3$ y $-3 \mid 3$, pero $3 \neq -3$.

## 2.10 RELACIONES *n*-ARIAS

Todas las relaciones que se han analizado eran relaciones binarias. Por una *relación n-aria* se entiende un conjunto de eneadas ordenadas. Para cualquier conjunto $S$, un subconjunto del conjunto producto $S^n$ se denomina relación $n$-aria sobre $S$. En particular, un subconjunto de $S^3$ se denomina *relación ternaria* sobre $S$.

### EJEMPLO 2.15

*a*) Sea $L$ una línea recta en el plano. Entonces "estar entre" es una relación ternaria $R$ sobre los puntos de $L$; es decir, $(a, b, c) \in R$ si $b$ está entre $a$ y $c$ sobre $L$.

*b*) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ determina una relación ternaria $T$ sobre el conjunto **R** de números reales. Es decir, una terna $(x, y, z)$ pertenece a $T$ si $(x, y, z)$ satisface la ecuación, lo cual significa que $(x, y, z)$ son las coordenadas de un punto en $\mathbf{R}^3$ sobre la esfera $S$ de radio 1 y centro en el origen $O = (0, 0, 0)$.

## PROBLEMAS RESUELTOS

### PRODUCTO DE CONJUNTOS

**2.1** Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$ y $C = \{3, 4\}$, encuentre: $A \times B \times C$.

$A \times B \times C$ consta de todas las ternas ordenadas $(a, b, c)$ donde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Estos elementos de $A \times B \times C$ se pueden obtener en forma sistemática mediante un diagrama de árbol (figura 2-5). Los elementos de $A \times B \times C$ son precisamente las 12 ternas ordenadas a la derecha del diagrama de árbol.

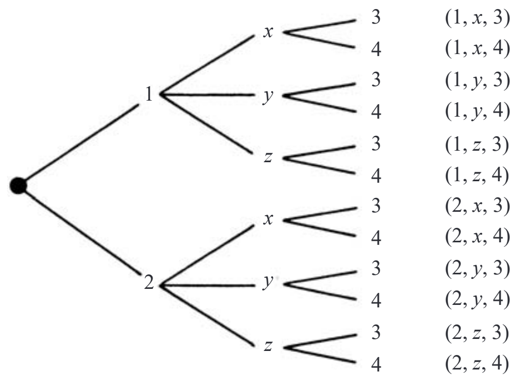



**Figura 2-5**

Observe que $n(A) = 2$, $n(B) = 3$ y $n(C) = 2$ y, como era de esperar,

$$n(A \times B \times C) = 12 = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$$

**2.2** Encuentre $x$ y $y$ dado $(2x, x + y) = (6, 2)$.

Dos pares ordenados son iguales si y sólo si las componentes correspondientes son iguales. Por tanto, se obtienen las ecuaciones

$$2x = 6 \quad \text{y} \quad x + y = 2$$

al resolver el sistema se obtienen las respuesta $x = 3$ y $y = 1$.

### RELACIONES Y SUS GRÁFICAS

**2.3** Encuentre el número de relaciones de $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2\}$.

En $A \times B$ hay $3(2) = 6$ elementos, y entonces hay $m = 2^6 = 64$ subconjuntos de $A \times B$. Así, de $A$ a $B$ hay $m = 64$ relaciones.

**2.4** Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$. Sea $R$ la siguiente relación de $A$ a $B$:

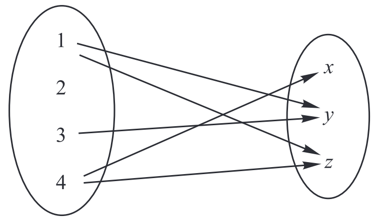
$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

*a*) Determine la matriz de la relación.
*b*) Trace el diagrama sagital de $R$.
*c*) Encuentre la relación inversa $R^{-1}$ de $R$.
*d*) Determine el dominio y el rango de $R$.

*a*) Vea la figura 2-6*a*). Observe que los renglones de la matriz están identificados por los elementos de $A$ y las columnas, por los elementos de $B$. También observe en la matriz que el elemento correspondiente a $a \in A$ y $b \in B$ es 1 si $a$ está relacionado con $b$ y 0 en caso contrario.

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

*a*)




*b*)

**Figura 2-6**

*b*) Vea la figura 2-6*b*). Observe que hay una flecha de $a \in A$ a $b \in B$ si y sólo si $a$ está relacionada con $b$; es decir, si y sólo si $(a, b) \in R$.

*c*) Los pares ordenados de $R$ se invierten para obtener $R^{-1}$:

$$R^{-1} = \{(y, 1), (z , 1), (y , 3), (x , 4), (z , 4)\}$$

Observe que al invertir las flechas en la figura 2-6*b*) se obtiene el diagrama sagital de $R^{-1}$.

*d*) El dominio de $R$, Dom($R$), consta de los primeros elementos de los pares ordenados de $R$, y el rango de $R$, Ran($R$), consta de los segundos elementos. Así,

$$\text{Dom}(R) = \{1, 3, 4\} \quad \text{y} \quad \text{Ran}(R) = \{x, y, z\}$$

**2.5** Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c)$ y $C = \{x, y, z\}$. Considere las siguientes relaciones $R$ y $S$ de $A$ a $B$ y de $B$ a $C$, respectivamente.

$$A = \{(1, b), (2, a), (2, c)\} \quad \text{y} \quad S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$$

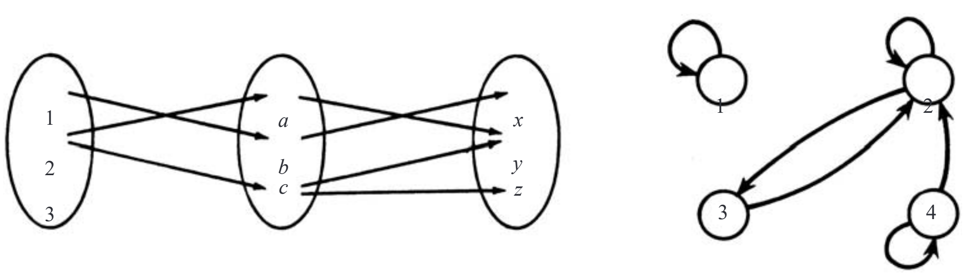
*a*) Encuentre la relación composición $R \circ S$.

*b*) Encuentre las matrices $M_R$, $M_S$ y $M_{R \circ S}$ de las relaciones respectivas $R$, $S$ y $R \circ S$, y comparar $M_{R \circ S}$ con el producto $M_R M_S$.

*a*) El diagrama sagital de las relaciones $R$ y $S$ se traza como en la figura 2-7*a*). Observe que 1 en $A$ está "conectado" con $x$ en $C$ mediante la ruta $1 \to b \to x$; así, $(1, x)$ pertenece a $R \circ S$. En forma semejante, $(2, y)$ y $(2, z)$ pertenecen a $R \circ S$.

Se tiene

$$R \circ S = \{(1, x), (2, y), (2, z)\}$$




*a*) *b*)

**Figura 2-7**

*b*) Las matrices $M_R$, $M_S$ y $M_{R\circ S}$ son las siguientes:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad M_{R\circ S} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al multiplicar $M_R$ y $M_S$ se obtiene

$$M_R M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que $M_{R\circ S}$ y $M_R M_S$ tienen las mismas entradas cero.

**2.6** Dada la relación $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$ sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

*a*) Trace su gráfica dirigida. *b*) Encuentre $R^2 = R \circ R$.

*a*) Para todo $(a, b) \in R$, se traza una flecha de $a$ a $b$ como en la figura 2-7*b*).

*b*) Para todo par $(a, b) \in R$, se encuentran todos los $(b, c) \in R$. Luego, $(a, c) \in R^2$. Así,

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

**2.7** Sean $R$ y $S$ las siguientes relaciones sobre $A = \{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}, \qquad S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$$

Encuentre *a*) $R \cup S$, $R \cap S$, $R^C$; *b*) $R \circ S$; *c*) $S^2 = S \circ S$.

*a*) $R$ y $S$ se tratan simplemente como conjuntos, y se toman la unión e intersección de costumbre. Para $R^C$ se utiliza el hecho de que $A \times A$ es la relación universal sobre $A$.

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(1, 2), (3, 3)\} \\ R \cup S &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\} \\ R^C &= \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\} \end{aligned}$$

*b*) Para todo par $(a, b) \in R$, se encuentran todos los pares $(b, c) \in S$. Entonces, $(a, c) \in R \circ S$. Por ejemplo, $(1, 1) \in R$ y $(1, 2), (1, 3) \in S$; por tanto, $(1, 2)$ y $(1, 3)$ pertenecen a $R \circ S$. Así,

$$R\circ S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

*c*) Al seguir el algoritmo en el inciso *b*), se obtiene

$$S^2 = S\circ S = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

**2.8** Demuestre el teorema 2.1: Sean $A, B, C$ y $D$ conjuntos. Suponga que $R$ es una relación de $A$ a $B$, que $S$ es una relación de $B$ a $C$ y que $T$ es una relación de $C$ a $D$. Entonces $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Es necesario demostrar que cada par ordenado en $(R \circ S) \circ T$ pertenece a $R \circ (S \circ T)$ y viceversa.

Se supone que $(a, d)$ pertenece a $(R \circ S) \circ T$. Entonces existe $c \in C$ tal que $(a, c) \in R \circ S$ y $(c, d) \in T$. Puesto que $(a, c) \in R \circ S$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$. Debido a que $(b, c) \in S$ y $(c, d) \in T$, se tiene $(b, d) \in S \circ T$; y puesto que $(a, b) \in R$ y $(b, d) \in S \circ T$, se tiene $(a, d) \in R \circ (S \circ T)$. En consecuencia, $(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$. En forma semejante, $R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$. Ambas relaciones de inclusión demuestran $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

## TIPOS DE RELACIONES Y PROPIEDADES DE CERRADURA

**2.9** Considere las cinco relaciones siguientes sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{ll} R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}, & \varnothing = \text{relación vacía} \\ S = \{(1, 1)(1, 2), (2, 1)(2, 2), (3, 3)\}, & A \times A = \text{relación universal} \\ T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\} & \end{array}$$

Determine si cada una de las relaciones indicadas sobre $A$ es: *a*) reflexiva; *b*) simétrica; *c*) transitiva; *d*) antisimétrica.

*a*) $R$ no es reflexiva puesto que $2 \in A$ pero $(2, 2) \notin R$. $T$ no es reflexiva puesto que $(3, 3) \notin T$ y, en forma semejante, $\varnothing$ no es reflexiva. $S$ y $A \times A$ son reflexivas.

*b*) $R$ no es simétrica puesto que $(1, 2) \in R$ pero $(2, 1) \notin R$, y en forma semejante, $T$ no es simétrica. $S$, $\varnothing$ y $A \times A$ son simétricas.

*c*) $T$ no es transitiva puesto que $(1, 2)$ y $(2, 3)$ pertenecen a $T$, pero $(1, 3)$ no pertenece a $T$. Las otras cuatro relaciones son transitivas.

*d*) $S$ no es antisimétrica porque $1 \neq 2$ y ambos $(1, 2)$ y $(2, 1)$ pertenecen a $S$. En forma semejante, $A \times A$ no es antisimétrica. Las otras tres relaciones son antisimétricas.

**2.10** Proporcione un ejemplo de una relación $R$ sobre $A = \{1, 2, 3\}$ tal que:

*a*) $R$ sea tanto simétrica como antisimétrica.
*b*) $R$ no sea simétrica ni antisimétrica.
*c*) $R$ sea transitiva pero $R \cup R^{-1}$ no transitiva.

Hay muchos ejemplos así. A continuación se presenta un conjunto de ejemplos posibles:

*a*) $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$; *b*) $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$; *c*) $R = \{(1, 2)\}$.

**2.11** Suponga que $C$ es una colección de relaciones $S$ sobre un conjunto $A$, y sea $T$ la intersección de las relaciones $S$ en $C$; es decir, $T = \cap (S \mid S \in C)$. Demostrar:

*a*) Si toda $S$ es simétrica, entonces $T$ es simétrica.
*b*) Si toda $S$ es transitiva, entonces $T$ es transitiva.

*a*) Suponga que $(a, b) \in T$. Entonces $(a, b) \in S$ para toda $S$. Puesto que toda $S$ es simétrica, $(b, a) \in S$ para toda $S$. Así, $(b, a) \in T$ y $T$ es simétrica.

*b*) Suponga que $(a, b)$ y $(b, c)$ pertenecen a $T$. Entonces $(a, b)$ y $(b, c)$ pertenecen a $S$ para toda $S$. Puesto que toda $S$ es transitiva, $(a, c)$ pertenece a $S$ para toda $S$. Por tanto, $(a, c) \in T$ y $T$ es transitiva.

**2.12** Sea $R$ una relación sobre un conjunto $A$, y sea $P$ una propiedad de las relaciones, como simetría y transitividad. Entonces $P$ se denomina $R$-*cerrable* si $P$ satisface las dos condiciones siguientes:

1) Existe una $P$-relación $S$ que contiene a $R$.
2) La intersección de las $P$-relaciones es una $P$-relación.

*a*) Demuestre que la simetría y la transitividad son $R$-cerrables para cualquier relación $R$.
*b*) Suponga que $P$ es $R$-cerrable. Entonces $P(R)$, la $P$-cerradura de $R$, es la intersección de todas las $P$-relaciones $S$ que contienen a $R$; es decir,

$$P(R) = \cap (S \mid S \text{ es una } P\text{-relación y } R \subseteq S)$$

*a*) La relación universal $A \times A$ es simétrica y transitiva y $A \times A$ contiene cualquier relación $R$ sobre $A$. Así, 1) se cumple. Por el problema 2.11, la simetría y la transitividad satisfacen 2). Entonces, la simetría y la transitividad son $R$-cerrables para cualquier relación $R$.

*b*) Sea $T = \cap (S \mid S$ es una $P$-relación y $R \subseteq S)$. Puesto que $P$ es $R$-cerrable, $T$ no es vacía por 1) y $T$ es una $P$-relación por 2). Debido a que cada relación $S$ contiene a $R$, la intersección $T$ contiene a $R$. Así, $T$ es una $P$-relación que contiene a $R$. Por definición, $P(R)$ es la $P$-relación más pequeña que contiene a $R$; por tanto, $P(R) \subseteq T$. Por otra parte, $P(R)$ es uno de los conjuntos $S$ que definen a $T$; es decir, $P(R)$ es una $P$-relación y si $R \subseteq P(R)$. En consecuencia, $T \subseteq P(R)$. Por consiguiente, $P(R) = T$.

**2.13** En la relación $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$, sobre el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Encuentre *a*) $(R)$reflexiva, *b*) $(R)$simétrica, *c*) $(R)$transitiva.

*a*) La cerradura reflexiva sobre $R$ se obtiene al añadir a $R$ todos los pares diagonales de $A \times A$ que aún no estén en $R$. Por tanto,

$$(R)\text{reflexiva} = R \cup \{(b, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\}$$

*b*) La cerradura simétrica sobre $R$ se obtiene al añadir a $R$ todos los pares en $R^{-1}$ que aún no estén en $R$. Por tanto,

$$(R)\text{simétrica} = R \cup \{(b, a), (c, b)\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$$

*c*) Puesto que $A$ tiene tres elementos, la cerradura transitiva sobre $R$ se obtiene al tomar la unión de $R$ con $R^2 = R \circ R$ y $R^3 = R \circ R \circ R$. Observe que

$$R^2 = R \circ R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$$

$$R^3 = R \circ R \circ R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$$

Por tanto,

$$(R)\text{transitiva} = R \cup R^2 \cup R^3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$$

## RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y PARTICIONES

**2.14** Dado el conjunto **Z** de enteros y un entero $m > 1$. Se dice que $x$ es congruente con $y$ módulo $m$, que se escribe

$$x \equiv y \ (\text{mód } m)$$

si $x - y$ es divisible entre $m$. Demuestre que esto define una relación de equivalencia sobre **Z**.

Es necesario demostrar que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

*i*) Para cualquier $x$ en **Z** se tiene $x \equiv x$ (mód $m$) porque $x - x = 0$ es divisible entre $m$. Por tanto, la relación es reflexiva.

*ii*) Suponga que $x \equiv y$ (mód $m$), de modo que $x - y$ es divisible entre $m$. Entonces $-(x - y) = y - x$ también es divisible entre $m$, de modo que $y \equiv x$ (mód $m$). Por tanto, la relación es simétrica.

*iii*) Ahora suponga que $x \equiv y$ (mód $m$) y $y \equiv z$ (mód $m$), de modo que ambos $x - y$ y $y - z$ son divisibles entre $m$. Entonces la suma

$$(x - y) + (y - z) = x - z$$

también es divisible entre $m$; por tanto, la relación es transitiva.

En consecuencia, la relación de congruencia módulo $m$ sobre **Z** es una relación de equivalencia.

**2.15** Sea $A$ un conjunto de enteros diferentes de cero y sea $\approx$ la relación sobre $A \times A$ definida por

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ siempre que } ad = bc$$

Demuestre que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Es necesario demostrar que $\approx$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

*i*) *Reflexividad*: Se tiene $(a, b) \approx (a, b)$, puesto que $ab = ba$. Por tanto, $\approx$ es reflexiva.

*ii*) *Simetría*: Suponga que $(a, b) \approx (c, d)$. Entonces $ad = bc$. En consecuencia, $cb = da$ y así $(c, d) \approx (a, b)$. Por tanto, $\approx$ es simétrica.

*iii*) *Transitividad*: Suponga que $(a, b) \approx (c, d)$ y que $(c, d) \approx (e, f)$. Entonces, $ad = bc$ y $cf = de$. Al multiplicar los términos correspondientes de las ecuaciones se obtiene $(ad)(cf) = (bc)(de)$. Al cancelar $c \neq 0$ y $d \neq 0$ en ambos miembros de la ecuación se obtiene $af = be$, y entonces $(a, b) \approx (e, f)$. Por tanto, $\approx$ es transitiva. En consecuencia, $\approx$ es una relación de equivalencia.

**2.16** Sea $R$ la siguiente relación de equivalencia sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

Encontrar la partición de $A$ inducida por $R$; es decir, encontrar las clases de equivalencia de $R$.

Los elementos relacionados con 1 son 1 y 5; así

$$[1] = \{1, 5\}$$

Se elige un elemento que no esté en [1]; por ejemplo, 2. Los elementos relacionados con 2 son 2, 3, y 6; así

$$[2] = \{2, 3, 6\}$$

El único elemento que no pertenece a [1] o a [2] es 4. El único elemento relacionado con 4 es 4. Así

$$[4] = \{4\}$$

En consecuencia, la partición de $A$ inducida por $R$ es:

$$[\{1, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}]$$

**2.17** Demuestre el teorema 2.6: Sea $R$ una relación de equivalencia en un conjunto $A$. Entonces el conjunto cociente $A/R$ es una partición de $A$. Específicamente:

*i*) $a \in [a]$, para toda $a \in A$.

*ii*) $[a] = [b]$, si y sólo si $(a, b) \in R$.

*iii*) Si $[a] \neq [b]$, entonces $[a]$ y $[b]$ son ajenos.

*a*) *Demostración de i*): Puesto que $R$ es reflexiva, $(a, a) \in R$ para toda $a \in A$ y, por consiguiente, $a \in [a]$.

*b*) *Demostración de ii*): Suponga que $(a, b) \in R$. Se quiere demostrar que $[a] = [b]$. Sea $x \in [b]$; entonces $(b, x) \in R$. Pero por hipótesis $(a, a) \in R$ y así, por transitividad, $(a, x) \in R$. En consecuencia, $x \in [a]$. Así, $[b] \subseteq [a]$. Para demostrar que $[a] \subseteq [b]$ se observa que $(a, b) \in R$ implica, por simetría, que $(b, a) \in R$. Entonces, por un razonamiento semejante, se obtiene $[a] \subseteq [b]$. En consecuencia, $[a] = [b]$.

Por otra parte, si $[a] = [b]$, entonces, por *i*), $b \in [b] = [a]$; por tanto, $(a, b) \in R$.

*c*) *Demostración de iii*): Se demuestra la proposición contrapositiva equivalente:

$$\text{Si } [a] \cap [b] \neq \varnothing \quad \text{entonces} \quad [a] = [b]$$

Si $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, entonces existe un elemento $x \in A$ con $x \in [a] \cap [b]$. Así, $(a, x) \in R$ y $(b, x) \in R$. Por simetría, $(x, b) \in R$ y por transitividad, $(a, b) \in R$. En consecuencia, por *ii*), $[a] = [b]$.

## ORDENAMIENTOS PARCIALES

**2.18** Sea $\ell$ cualquier colección de conjuntos. La relación de inclusión de conjuntos $\subseteq$, ¿es de orden parcial sobre $\ell$?

Sí, puesto que la inclusión de conjuntos es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es decir, para conjuntos arbitrarios $A$, $B$ y $C$ en $\ell$ se tiene: *i*) $A \subseteq A$; *ii*) si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$; *iii*) si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

**2.19** Considere el conjunto **Z** de enteros. $aRb$ se define como $b = a^r$ para algún entero positivo $r$. Demuestre que $R$ es un orden parcial sobre **Z**; es decir, que $R$ es: *a*) reflexiva; *b*) antisimétrica; *c*) transitiva.

*a*) $R$ es reflexiva puesto que $a = a^1$.

*b*) Suponga que $aRb$ y $bRa$; por ejemplo, $b = a^r$ y $a = b^s$. Entonces $a = (a^r)^s = a^{rs}$. Hay tres posibilidades: *i*) $rs = 1$, *ii*) $a = 1$ y *iii*) $a = -1$. Si $rs = 1$, entonces $r = 1$ y $s = 1$ y así $a = b$. Si $a = 1$, entonces $b = 1^r = 1 = a$, y en forma semejante, si $b = 1$, entonces $a = 1$. Por último, si $a = -1$, entonces $b = -1$ (puesto que $b \neq 1$) y $a = b$. En los tres casos se tiene que $a = b$. Por tanto, $R$ es antisimétrica.

*c*) Suponga que $aRb$ y $bRc$; por ejemplo, $b = a^r$ y $c = b^s$. Entonces $c = (a^r)^s = a^{rs}$ y, por consiguiente, $aRc$. Por tanto, $R$ es transitiva.

En consecuencia, $R$ es un orden parcial sobre **Z**.

## PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

### RELACIONES

**2.20** Sean $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c, d\}$ y $W = \{a, d\}$. Encuentre $S \times T \times W$.

**2.21** Encuentre $x$ y $y$, donde: *a*) $(x + 2, 4) = (5, 2x + y)$; *b*) $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$.

**2.22** Demuestre: *a*) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; *b*) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

**2.23** Considere la relación: $R = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$, sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

*a*) Encuentre la matriz $M_R$ de $R$.
*b*) Encuentre el dominio y el rango de $R$.
*c*) Encuentre $R^{-1}$.
*d*) Trace la gráfica dirigida de $R$.
*e*) Encuentre la relación composición $R \circ R$.
*f*) Encuentre $R \circ R^{-1}$ y $R^{-1} \circ R$.

**2.24** Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z\}$. Considere las relaciones $R$ de $A$ a $B$ y $S$ de $B$ a $C$ como sigue:

$$R = \{(1, b), (3, b), (3, b), (4, c)\} \quad \text{y} \quad S = \{(a, y), (c, x), (a, z)\}$$

*a*) Dibuje los diagramas de $R$ y $S$.
*b*) Encuentre la matriz de cada relación $R$, $S$ (composición) $R \circ S$.
*c*) Escriba $R^{-1}$ y la composición $R \circ S$ como conjuntos de pares ordenados.

**2.25** Sean $R$ y $S$ las siguientes relaciones sobre $B = \{a, b, \text{c}, d\}$:

$$R = \{(a, b), (a, c), (c, b), (c, d), (d, b)\} \quad \text{y} \quad S = \{(b, a), (c, c), (c, d), (d, a)\}$$

Encuentre las siguientes relaciones composición: *a*) $R \circ S$; *b*) $S \circ R$; *c*) $R \circ R$; *d*) $S \circ S$.

**2.26** Sea $R$ la relación sobre **N** definida por $x + 3y = 12$; es decir, $R = \{(x, y) \mid x + 3y = 12\}$

*a*) Escriba $R$ como un conjunto de pares ordenados.
*b*) Encuentre el dominio y el rango de $R$.
*c*) Encuentre $R^{-1}$.
*d*) Encuentre la relación composición $R \circ R$.

### PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

**2.27** En cada uno de los siguientes incisos se define una relación sobre los enteros positivos **N**:

1) "$x$ es mayor que $y$".
2) "$xy$ es el cuadrado de un entero".
3) $x + y = 10$.
4) $x + 4y = 10$.

Determine cuáles de esas relaciones son: *a*) reflexivas; *b*) simétricas; *c*) antisimétricas; *d*) transitivas.

**2.28** Sean $R$ y $S$ relaciones sobre un conjunto $A$. Suponga que $A$ tiene tres elementos y mencione si cada una de las siguientes declaraciones es falsa o verdadera. Si es falsa, proporcione un contraejemplo sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$:

*a*) Si $R$ y $S$ son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica.
*b*) Si $R$ y $S$ son simétricas, entonces $R \cup S$ es simétrica.
*c*) Si $R$ y $S$ son reflexivas, entonces $R \cap S$ es reflexiva.

*d*) Si $R$ y $S$ son reflexivas, entonces $R \cup S$ es reflexiva.
*e*) Si $R$ y $S$ son transitivas, entonces $R \cup S$ es transitiva.
*f*) Si $R$ y $S$ son antisimétricas, entonces $R \cup S$ es antisimétrica.
*g*) Si $R$ es antisimétrica, entonces $R^{-1}$ es antisimétrica.
*h*) Si $R$ es reflexiva, entonces $R \cap R^{-1}$ no es vacía.
*i*) Si $R$ es simétrica, entonces $R \cap R^{-1}$ no es vacía.

**2.29** Suponga que $R$ y $S$ son relaciones sobre un conjunto $A$ y que $R$ es antisimétrica. Demuestre que $R \cap S$ es antisimétrica.

## RELACIONES DE EQUIVALENCIA

**2.30** Demuestre que si $R$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto $A$, entonces $R^{-1}$ también es una relación de equivalencia sobre $A$.

**2.31** Sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, 18, 19\}$. Sea $R$ la relación sobre $S$ definida por "$xy$ es un cuadrado". *a*) Demuestre que $R$ es una relación de equivalencia. *b*) Encuentre la clase de equivalencia $[1]$. *c*) Enumere todas las clases de equivalencia con más de un elemento.

**2.32** Sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$. Sea $R$ la relación de equivalencia sobre $S$ definida por $x \equiv y$ (mód 5); es decir, $x - y$ es divisible entre 5. Encuentre la partición de $S$ inducida por $R$; es decir, el conjunto cociente $S/R$.

**2.33** Sea $S = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ y sea $\sim$ la relación sobre $A \times A$ definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{siempre que} \quad a + d = b + c.$$

*a*) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
*b*) Encuentre $[(2, 5)]$; es decir, la clase de equivalencia de $(2, 5)$.

### Respuestas a los problemas suplementarios

**2.20** $\{(a, b, a), (a, b, d), (a, c, a), (a, c, d), (a, d, a), (a, d, d), (b, b, a), (b, b, d), (b, c, a), (b, c, d), (b, d, a), (b, d, d), (c, b, a), (c, b, d), (c, c, a), (c, c, d), (c, d, a), (c, d, d)\}$

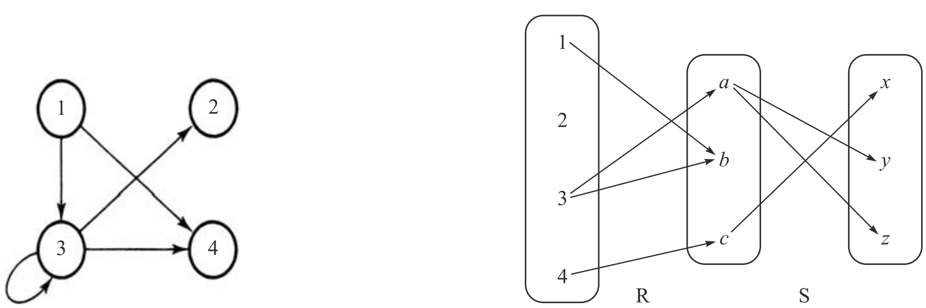
**2.21** *a*) $x = 3, y = -2$; *b*) $x = 2, y = 3$.

**2.23** *a*) $M_R = [0, 0, 1, 1; 0, 0, 0, 0; 0, 1, 1, 1; 0, 0, 0, 0]$;
*b*) Dominio $= \{1, 3\}$, rango $= \{2, 3, 4\}$;
*c*) $R^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$;
*d*) Vea la figura 2-8*a*);
*e*) $R \circ R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$.

**2.24** *a*) Vea la figura 2-8*b*);
*b*) $R = [0, 1, 0; 0, 0, 0; 1, 1, 0; 0, 0, 1]$,
$S = [0, 1, 1; 0, 0, 0; 1, 0, 0]$,
$R \circ S = [0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 1; 1, 0, 0]$,
*c*) $\{(b, 1), (a, 3), (b, 3), (c, 4)\}$, $\{(3, y), (3, z), (4, x)\}$.

**2.25** *a*) $R \circ S = \{(a, c), (a, d), (c, a), (d, a)\}$
*b*) $S \circ R = \{(b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, c)\}$
*c*) $R \circ R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (c, b)\}$
*d*) $S \circ S = \{(c, c), (c, a), (c, d)\}$

**2.26** *a*) $\{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$; *b*) *i*) $\{9, 6, 3)\}$; *ii*) $\{1, 2, 3)\}$; *iii*) $\{(1, 9), (2, 6), (3, 3)\}$; *c*) $\{(3, 3)\}$.




*a*)  *b*)

**Figura 2-8**

**2.27** *a*) Ninguna; *b*)(2) y (3); *c*) (1) y (4); *d*) todas, excepto (3).

**2.28** Todas son verdaderas excepto: *e*) $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 3)\}$; *f*) $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 1)\}$.

**2.31** *b*) {1, 4, 9, 16}; *c*) {1, 4, 9, 16}, {2, 8, 18}, {3, 12}.

**2.32** [{1, 6, 11}, {2, 7, 14}, {3, 8, 133}, {4, 9, 14}, {5, 10, 15}].

**2.33** *b*) {(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)}.